$f(x,y) = 3x + 2y + 5$

# الفصل الرابع

# فضاءات هيلبرت

# Hilbert spaces

## ٤-١) فضاء الجداء الداخلي Inner product space :

**تعريف (١) :** اشكل المزدوج عملية الجداء عقدي .

ليكن $H$ فضاءً خطياً عقدياً، نسمي $H$ فضاء جداء داخلي إذا أمكن مقابلة كل عنصرين $y,x$ من $H$ بعدد عقدي (وحيد) نرمز له بـــ $\langle x , y \rangle$ وبحيث تتحقق الشروط الآتية:

$$1)\quad \langle x , x \rangle \geq 0 \ , \ \forall x \in H$$

$$2)\quad \langle x , x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$3)\quad \langle x , y \rangle = \overline{\langle y , x \rangle} \ , \ \forall x , y \in H$$

(الخط يرمز للمرافق).

$$4)\quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle$$ خطية الجداء .

$$\forall x_1 , x_2 , y \in H \quad , \quad \forall \lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

وفي هذه الحالة نسمي العدد $\langle x , y \rangle$ الجداء الداخلي للعنصرين $y,x$ .

**نتائج :**

١- $\langle \theta , x \rangle = 0$ وبشكل خاص $\langle \theta , \theta \rangle = 0$ .

٢- من أجل $x , y_1 , y_2 \in H$ و $\beta_1 , \beta_2 \in \mathbb{C}$ يكون :

$$\langle x , \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 , x \rangle}$$
$$= \overline{\beta_1 \langle y_1 , x \rangle + \beta_2 \langle y_2 , x \rangle}$$
$$= \overline{\beta_1} . \overline{\langle y_1 , x \rangle} + \overline{\beta_2} . \overline{\langle y_2 , x \rangle}$$
$$= \overline{\beta_1} . \langle x , y_1 \rangle + \overline{\beta_2} . \langle x , y_2 \rangle$$

**مبرهنة (١) :**

أياً كان العنصران $x , y \in H$ تصح المتراجحة (متراجحة شفارتز):

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

وتكون المساواة صحيحة إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ أو $x=\alpha y$ حيث $\alpha$ عدد عقدي مناسب.

**الإثبات :**

إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ فالمساواة واضحة تماماً وإذا كان $x=\alpha y$ يكون لدينا :

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle \alpha y,y\rangle|^2 = \langle \alpha y,y\rangle.\overline{\langle \alpha y,y\rangle}$$
$$= \alpha.\overline{\alpha}.\langle y,y\rangle.\langle y,y\rangle$$
$$= \langle \alpha y,\alpha y\rangle.\langle y,y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

وبالتالي يكون :

$$|\langle x,y\rangle| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

الآن من أجل أي عنصرين $x,y \in H$ بحيث $\langle x,y\rangle \ne 0$ ومن أجل أي عدد عقدي $\lambda$ يكون لدينا :

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \ge 0$$

$$\langle x,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \ge 0$$

نأخذ : $\lambda := \dfrac{\langle x,x\rangle}{\langle y,x\rangle}$ فنجد أنّ :

$$\langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle + \frac{\langle x,x\rangle^2}{|\langle y,x\rangle|^2}\langle y,y\rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle}{|\langle y,x\rangle|^2} \ge 1$$

$$\Rightarrow |\langle y,x\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

وأخيراً فإنّ :

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

**ملاحظة (١) :**

اعتماداً على متراجحة شفارتز يمكن تعريف نظيم في فضاء الجداء الداخلي $H$ وذلك

$Z + \bar{Z} = 2\operatorname{Re} Z \; , \; \operatorname{Re} Z \leq |z|$ .



بأن نضع :

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle} \; ; x \in H \qquad (*)$$

ونقول عندئذٍ بأن النظيم مولد من جداء داخلي . ولنتحقق فيما إذا كان هذا التعريف للنظيم يحقق شروط النظيم أم لا :

- $\|x\| \geq 0 \; ; \forall x \in H$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x,x \rangle} = |\lambda| . \|x\| \; ; \lambda \in \mathbb{C}, x \in H$
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$

$$= \langle x,x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$\leq \langle x,x \rangle + 2|\langle x,y \rangle| + \langle y,y \rangle$$
$$\leq \langle x,x \rangle + 2\sqrt{\langle x,x \rangle}.\sqrt{\langle y,y \rangle} + \langle y,y \rangle$$
$$= \left( \sqrt{\langle x,x \rangle} + \sqrt{\langle y,y \rangle} \right)^2$$
$$= \left( \|x\| + \|y\| \right)^2$$

وبالتالي فإنّ : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

أي أنّ (*) يمثل نظيماً في فضاء الجداء الداخلي $H$ .

مما سبق نجد أنّ كل فضاء جداء داخلي هو فضاء خطي منظم.

**ملاحظة (٢):**

حسب الملاحظة (٦) من الفصل الثالث فإن الجداء الداخلي يُعرف مسافة على فضاء $X$ إذا أخذنا:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

**ملاحظة (٣):**

يمكننا أن نولّد (نشتق) الجداء الداخلي من النظيم الموافق له . فإذا كان فضاء الجداء الداخلي حقيقياً فإن:

$$\langle x , y \rangle = \frac{1}{4}\left( \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \right)$$

أما إذا كان فضاء الجداء الداخلي عقدياً فإن:

$$\operatorname{Re}\langle x , y \rangle = \frac{1}{4}\left( \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \right)$$

$$\operatorname{Im}\langle x , y \rangle = \frac{1}{4}\left( \| x + i y \|^2 - \| x - i y \|^2 \right)$$

**ملاحظة (٤):**

ليس بالضرورة كل فضاء خطي منظم هو فضاء جداء داخلي.

**تعريف (٢) :**

كل فضاء جداء داخلي تام نسميه فضاء هيلبرت ، أي أن فضاءات هيلبرت هي فضاءات باناخ.

**مبرهنة (٢) :**

في كل فضاء جداء داخلي $H$ تصح المساواة التالية: (المسماة مساواة متوازي الأضلاع):

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left( \| x \|^2 + \| y \|^2 \right) \quad ; \ \forall x , y \in H$$

**الإثبات :**

$$\| x + y \|^2 = \langle x + y , x + y \rangle = \| x \|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x , y \rangle + \| y \|^2$$

هذا ما وجدناه في الملاحظة السابقة وبطريقة مشابهة نجد أنّ :

$$\| x - y \|^2 = \langle x - y , x - y \rangle = \| x \|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x , y \rangle + \| y \|^2$$

وبالتالي فإنّه وبجمع العلاقتين نجد :

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left( \| x \|^2 + \| y \|^2 \right)$$

**ملاحظة (٥) :**

إذا نقضنا هذه الخاصة فإنّ الفضاء ليس فضاء هيلبرت لأنّ عدم تحقق هذه المساواة ينقض كون الفضاء هو فضاء جداء داخلي. وبالتالي نستطيع نقض فضاء هيلبرت بأحد

$d(x, x_n) < \delta \Leftrightarrow d(x, x_n) \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x$

$d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \Leftrightarrow d(f(x), f(x_n)) \to 0 \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$

**ثلاثة أشياء :**

١- عدم تحقق شرط من شروط الجداء الداخلي .

٢- الفضاء ليس فضاءً تاماً .

٣- عدم تحقق مساواة متوازي الأضلاع .

اذا كنا سنأخذ صورة عدة عناصر أي $g(x_n)$ وبالاستمرار نأخذ صورة عنصر واحد فقط $g(x_0)$ حيث لا نعرف كل العناصر بسبب الاستمرار دخلت النهاية لداخل التابع : $\lim g(x_n)$

**مبرهنة (٣) :**

إنّ عملية الجداء الداخلي تعرّف تابعاً مستمراً.

**الإثبات:**

بفرض أن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين من عناصر فضاء الجداء الداخلي $H$ بحيث : $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ولنبين أن : $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$. حل محل $g$ وأدخلنا النهاية

$$= \left|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle\right| = \left|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle\right|$$

$$\leq \left|\langle x_n, y_n - y \rangle\right| + \left|\langle x_n - x, y \rangle\right|$$

$$\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| . \|y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

حسب شفارتز

$d(\langle x_n, y_n \rangle, \langle x, y \rangle)$ إذا كان $\to 0$ $\Leftrightarrow$ $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

**١- أمثلة عن فضاءات هيلبرت :**

**- الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ :**

الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو فضاء هيلبرت حيث الجداء الداخلي معرّف بالدستور :

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \dots\dots\dots + \xi_n \eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

من أجل : $x = (\xi_1, \dots\dots\dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots\dots\dots, \eta_n)$ من الفضاء $\mathbb{R}^n$ .

وبالتالي النظيم يعرّف بالشكل :

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\xi_1^2 + \dots\dots\dots + \xi_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**- الفضاء $\mathbb{C}^n$ :**

إنّ الفضاء $\mathbb{C}^n$ هو فضاء هيلبرت المزوّد بالجداء الداخلي المعرف بالدستور :

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \overline{\eta_1} + \dots\dots\dots + \xi_n \overline{\eta_n}$$

وفي الحقيقة ، فإنّنا نستنتج أنّ النظيم هو :

$$\|x\|:=\left(\xi_1\overline{\xi_1}+\dots\dots\dots+\xi_n\overline{\xi_n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**– الفضاء $\ell_2$ ( فضاء هيلبرت الإحداثي ) :**

إن الفضاء $\ell_2$ هو فضاء هيلبرت المزود بالجداء الداخلي المعرّف بالمساواة :

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}$$

وتقارب هذه المتسلسلة ناتج من متراجحة كوشي شفارتز : $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|.\|y\|$

حيث كل من $\|x\|$ و $\|y\|$ محدودان من تعريف $\ell_2$ وكون أنّ النظيم معرّف بالشكل:

$$\|x\|=\langle x,x\rangle=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\xi_i}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**– الفضاء $L_2[a,b]$ :**

إنّ الفضاء $L_2[a,b]$ هو فضاء هيلبرت المزود بالجداء الداخلي المعرف بالدستور :

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t).\overline{y(t)}.dt$$

إذا افترضنا أنّ التوابع من $L_2[a,b]$ حقيقيّة عندئذ نظيم العنصر $x(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(\int_a^b x(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

أمّا إذا كانت التوابع عقدية فعندئذ يعرّف الجداء الداخلي بالعلاقة التالية :

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t).\overline{y(t)}.dt$$

ويكون النظيم في هذه الحالة :

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(\int_a^b x(t)\overline{x(t)}.dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

## ٢- أمثلة عن فضاءات ليست فضاء هيلبرت :

١) الفضاء $\ell_p$ ليس فضاء جداء داخلي عندما يكون $p \neq 2$ وبالتالي فإنّ $\ell_p$ ليس فضاء هيلبرت .

إنّ هذه الدعوى تعني أنّ النظيم على $\ell_p$ عندما يكون $p \neq 2$، لا يمكن أن يولّد من جداء داخلي ، سنبرهن على هذا الأمر بإثبات أن النظيم لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع .

في الحقيقة إذا كان $x = (1,1,0,0,.......) \in \ell_p$ و $y = (-1,1,0,0,.......) \in \ell_p$ فإنّ:

$$\|x+y\| = \|x-y\| = 2 , \|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$$

أي أن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة. بذلك فإنّ $\ell_p$ هو فضاء باناخ دون أن يكون فضاء هيلبرت .

٢) الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنّه ليس فضاء هيلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t) = 1$ و $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$ فإننا نجد أنّ : $\|x\| = 1$ و $\|y\| = 1$ وأنّ:

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x+y\| = 2$ و $\|x-y\| = 1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4$

في حين أنّ : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$

بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

## ٣- التعامد في فضاءات هيلبرت :

**تعريف (٣) :**

نقول إن العنصر $x \neq \theta$ في فضاء جداء داخلي $H$ أنه متعامد مع العنصر $y \neq \theta$